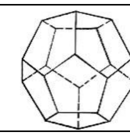
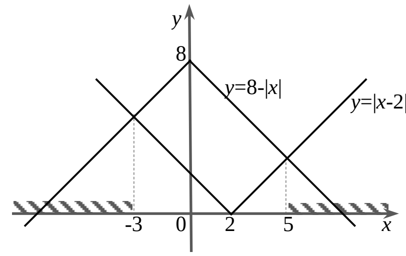
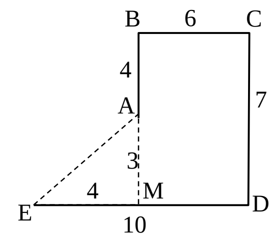
Liepājas Universitātes profesora Edvīna Ģinguļa vārdā nosauktās matemātikas olimpiādes

10. – 12. klašu

1. daļas ATBILDES

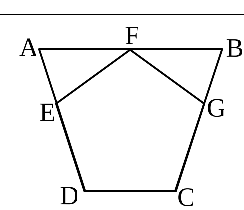
Uzd. nr.	Pareizā atbilde	Skaidrojums
1.	**A**	$9^n+9^n+9^n=3\cdot 9^n=3\cdot 3^{2n}=3^{2n+1}=3^{2015}\Rightarrow 2n+1=2015\Rightarrow n=1007$.
2.	**C**	9=3·3, 12=3·4 un 15=3·5, tātad dotais trijstūris līdzīgs trijstūrim ar malu garumiem 3, 4 un 5, kas ir taisnleņķa trijstūris.
3.	**D**	Parabolas zari vērsti uz augšu, tātad $a>0$. c vienāds ar krustpunkta ar Oy asi koordināti, tātad $c>0$. Virsotnes koordināte $x_0=-\dfrac{b}{2a}>0$ un $a>0$, tad $b<0$.
4.	**D**	Dodekaedrs ir regulārs daudzskaldnis, kura visas skaldnes ir regulāri piecstūri, tam ir 12 skaldnes. 
5.	**D**	Apzīmējot $\dfrac{1}{x-5}=a$ un $\dfrac{1}{y+2}=b$, iegūstam vienādojumu sistēmu $\begin{cases}10a+b=1\\25a+3b=2\end{cases}$ kuras atrisinājums ir $a=\dfrac{1}{5}, b=-1$. Atgriežoties pie apzīmējumiem, atrod, ka $x=10$ un $y=-3$.
6.	**D**	Visi bezgalīgi decimāldaļskaitļi ir reāli skaitļi. Ja decimāldaļskaitlis ir periodisks, tas ir racionāls skaitlis, ja neperiodisks – tad iracionāls. Acīmredzot dotais decimāldaļskaitlis nav periodisks, tātad tas ir iracionāls skaitlis.
7.	**A**	Augšējā trijstūra apakšējo kreiso leņķi apzīmēsim ar α, otru ar β. Tad $x+\alpha+\beta=180°$, $x+\alpha+70°=180°$ un $x+\beta+80°=180°\Rightarrow$ $x+\alpha+70°+x+\beta+80°-(x+\alpha+\beta)=180°+180°-180°\Rightarrow x=30°$
8.	**D**	Regulāra sešstūra simetrijas asis ir taisnes, kas satur lielās diagonāles, tādas ir 3, un taisnes, kas iet caur pretējo malu viduspunktiem, tādas arī ir 3, tātad pavisam ir 3+3=6 simetrijas asis.
9.	**D**	Skaitļa 3^n pēdējie cipari veido periodu ar garumu 4 (ja n=1, tas ir 3; n=2, tas ir 9; n=3, tas ir 7, n=4, tas ir 1, n=5, tas ir 3 utt.). $2015=4\cdot 503+3$, tāpēc skaitļa 3^{2015} pēdējais cipars ir tāds pats kā skaitļa 3^3 pēdējais cipars, t.i., 7.
10.	**C**	Kvadrātam apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir vienāds ar pusi no kvadrāta diagonāles, tātad kvadrāta diagonāle $2a$, tad kvadrāta mala ir $\dfrac{2a}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$, savukārt kvadrātā ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir puse no malas, t.i., $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
11.	**E**	$\left(1+\sqrt{3}\right)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^3=1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}=10+6\sqrt{3}$
12.	**B**	Nevienādību var atrisināt, piem., grafiski. 

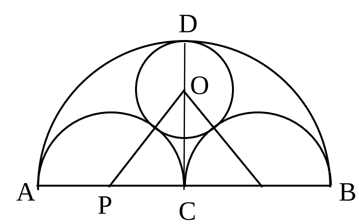
13.	**B**	Ja bija piecas pirmdienas, otrdienas un trešdienas, tad šajā mēnesī bija 31 diena, tātad 31. datums bija trešdienā, bet 1.datums pirmdienā. Tad iepriekšējā mēneša pēdējais datums bija svētdienā. Tā kā bija tikai 4 svētdienas, tad tajā mēnesī nebija vairāk kā 28 dienas, tātad tas bija februāris. Tātad nākamais mēnesis būs aprīlis, 1. datums būs ceturtdienā, un tajā būs piecas ceturtdienas un piektdienas, citas dienas atkārtosies tikai 4 reizes.
14.	**B**	Visu daļu vērtības ir pozitīvi skaitļi. Lai tās salīdzinātu, daļas paplašināsim, lai tām būtu vienādi skaitītāji, tad lielākā vērtība būs tai daļai, kurai mazā saucējs. $\frac{x}{y+1}=\frac{6x}{6y+6}$, $\frac{x}{y-1}=\frac{6x}{6y-6}$, $\frac{2x}{2y+1}=\frac{6x}{6y+3}$, $\frac{2x}{2y-1}=\frac{6x}{6y-3}$, $\frac{3x}{3y+1}=\frac{6x}{6y+2}$. $6y-6<6y-3<6y+2<6y+3<6y+6$, tātad lielākā vērtība ir daļai $\frac{x}{y-1}$.
15.	**C**	Ja prece tiek nocenota par 20%, tad tās cena ir 80% no iepriekšējās vērtības. Ja preces sākotnējā cena bija *x*€, tad pēc trīsreizējas nocenošanas tās cena ir $0{,}8\cdot(0{,}8\cdot(0{,}8x))=0{,}512x$ jeb 51,2% no sākotnējās cenas, tātad cena tika samazināta par 48,8%≈49%.
16.	**C**	Apskatām pilsētu shematisko izvietojumu. Taisnleņķa trijstūra AME katetes ir AM=3 km un EM=4 km, tātad tā hipotenūza AE=5 km. 

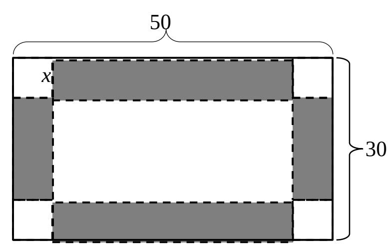
Liepājas Universitātes profesora Edvīna Ģinguļa vārdā nosauktās matemātikas olimpiādes

10. – 12. klašu

2. daļas ATBILDES

Uzd. nr.	Pareizā atbilde
1.	Ja skaitlis beidzas tieši ar 10 nullēm, tas dalās ar 10^{10}, bet nedalās ar 10^{11}, tātad tā sadalījumā pirmreizinātājos ir vismaz 10 piecinieki un vismaz 10 divnieki, turklāt viens no šiem pirmskaitļiem (2 vai 5) ir sastopams tieši 10 reizes. Skaitlī $n!$ pirmreizinātājs 2 sastopams vairāk reizes nekā 5, tāpēc jāatrod tādas n vērtības, kurām skaitlis $n!$ pirmreizinātāju 5 satur tieši 10 reizes. Ievērosim, ka skaitļi $(5k)!$, $(5k+1)!$, $(5k+2)!$, $(5k+3)!$ un $(5k+4)!$ (k – vesels skaitlis) satur vienādu skaitu pirmreizinātāju 5. Tāpēc apskatām skaitļu, kas dalās ar 5, faktoriālus, lai atrastu mazāko no meklējamajiem skaitļiem. 5! satur 5^1 (tikai no skaitļa 5); 10! – 5^2 (no skaitļiem 5 un 10); 15! – 5^3; 20! – 5^4; 25! – 5^6 (no skaitļiem 5, 10, 15, 20 ir pa 5^1, bet 25 satur 5^2); 30! – 5^7, 35! – 5^8, 40! – 5^9; 45! satur 5^{10}. Tātad meklētās n vērtības ir 45, 46, 47, 48, 49.
2.	Ja kuba tilpums $V = a^3 = 512\,\text{cm}^3$, tad šķautnes garums $a = 8$ cm. Kuba sānu virsmu veido četri kvadrāti, tātad $S_{sanu} = 4 \cdot 8^2 = 256\,\text{cm}^2$. Skaldnes diagonāles garums ir $a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ cm.
3.	Ja y ir vesels skaitlis, tad $\left\lvert \frac{1}{y+\frac{1}{z}} \right\rvert = \left\lvert \frac{z}{yz+1} \right\rvert < 1$, ja $y \neq 0$ vai $\frac{1}{y+\frac{1}{z}} = z$, ja $y=0$. Otrs gadījums neder, jo veselu skaitļu x un y summa nevar būt $\frac{10}{7}$. Tātad $-1 < \frac{1}{y+\frac{1}{z}} < 1$. Ievērosim, ka $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 2 - \frac{4}{7}$, tātad $x=1$ vai $x=2$. Ja $x=1$, tad $\frac{z}{yz+1} = \frac{3}{7}$, no kurienes $z=3$ un $y=2$. Ja $x=2$, tad $\frac{z}{yz+1} = -\frac{4}{7}$, no kurienes $z=4$ un $y=-2$. *Atbilde:* $x_1 = 1,\ y_1 = 2,\ z_1 = 3$; $x_2 = 2,\ y_2 = -2,\ z_2 = 4$
4.	Regulāra piecstūra iekšējie leņķi ir 108°. $\angle FAE = \angle AEF = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ (no blakusleņķu un iekšējo vienpusleņķu īpašībām). Tātad ΔAEF – vienādsānu un AF=EF=DC=1. Līdzīgi pamato, ka FB=GF=1. Tātad AB=AF+FB=1+1=2. 
5.	$\left(2^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{8}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{16}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{16}}-1\right) = \left(2^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{8}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{8}}-1\right) =$ $= \left(2^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{4}}-1\right) = \left(2^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{1}{2}}-1\right) = 2-1 = 1$
6.	$(a^2+1)(b^2+1) = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 + 2ab - 2ab = ((ab)^2 + 2ab + 1) + (a^2 - 2ab + b^2) =$ $= (ab+1)^2 + (a-b)^2$ vai $(ab-1)^2 + (a+b)^2$

7.	Stundu rādītājs 1 stundas laikā pagriežas par $\frac{1}{12}\cdot 360° = 30°$, tātad 1 minūtes laikā tas pagriežas par $\frac{1}{60}\cdot 30° = 0{,}5°$. Minūšu rādītāji 1 minūtes laikā pagriežas par $\frac{1}{60}\cdot 360° = 6°$. Tad pēc x minūtēm leņķis starp minūšu un stundu rādītājiem būs $6°\cdot x - 0{,}5°\cdot x = 5{,}5°\cdot x$. Ja $5{,}5°\cdot x = 30°$, tad $x = \frac{30°}{5{,}5°} = \frac{300}{55} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ minūtes.
8.	Apzīmēsim arbūzu masas ar *x*, *y* un *z*. Tad $\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=6 \\ y+z=7 \end{cases}$. Saskaitot visus šos vienādojumus, iegūst $2(x+y+z)=18 \Rightarrow x+y+z=9$. No šīs vienādības atņemot sistēmas vienādojumus, iegūstam z=4 kg, y=3 kg un x=2 kg.
9.	Iegūtajam ķermenim ir 1 pamats, *n* skaldnes – prizmas sānu skaldnes un *n* skaldnes – piramīdas sānu skaldnes, tātad pavisam ir $2n+1$ skaldnes. Šim ķermenim ir *n* šķautnes apakšējā pamatā, *n* šķautnes – prizmas sānu šķautnes, *n* šķautnes – prizmas un piramīdas pamatu kopīgās šķautnes, *n* šķautnes – piramīdas sānu šķautnes, tātad pavisam ir 4*n* šķautnes.
10.	Ņemot vērā dotos nosacījumus, $b < b+a = c$, $b > a\cdot b = d$, $d = a\cdot b > a:b = e$. Tātad $e < d < b < c$.
11.	Pēc Vjeta teorēmas $p\cdot q = q$ un $p+q = -p$. Tad p=1 vai q=0. 1) Ja p=1, tad $q = -2p = -2$. 2) Ja q=0, tad $2p = 0$ jeb p=0.
12.	Apzīmēsim meklējamo rādiusu ar *r*. AC=CB=2 m, PC=AP=1 m, CD=AC=2 m. Apskatām ΔPOC (O – mazā riņķa centrs, P – pusriņķa centrs): $\mathrm{OC} = 2-r$, $\mathrm{OP} = 1+r$. Pēc Pitagora teorēmas $\mathrm{PC}^2 + \mathrm{OC}^2 = \mathrm{OP}^2 \Rightarrow 1^2 + (2-r)^2 = (1+r)^2$ $\Rightarrow 1^2 + 4 - 4r + r^2 = 1 + 2r + r^2 \Rightarrow 6r = 4 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$ m. 
13.	$(2\otimes 3)\otimes 4 = \left(2^3 - 3^2\right)\otimes 4 = (8-9)\otimes 4 = -1\otimes 4 = (-1)^4 - 4^{-1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
14.	Abu prizmu kopējo pilnas virsmas laukumu veido kuba pilnas virsmas laukums un vēl divas skaldnes – kuba diagonālšķēlums. Tātad meklētais laukums ir $6\cdot 2^2 + 2\cdot 2\cdot 2\sqrt{2} = 24 + 8\sqrt{2}$ cm^2.
15.	$\frac{(10!+9!)(8!+7!)(6!+5!)(4!+3!)(2!+1!)}{(10!-9!)(8!-7!)(6!-5!)(4!-3!)(2!-1!)} = \frac{9!(10+1)7!(8+1)5!(6+1)3!(4+1)1!(2+1)}{9!(10-1)7!(8-1)5!(6-1)3!(4-1)1!(2-1)} = \frac{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1} = 11$
16.	Ar *k* apzīmēsim 1 krūzi kafijas, ar *p* – 1 krūzi piena. Sākumā bija 1*k*. Kad izdzēra trešdaļu krūzes, palika $\frac{2}{3}k$, pielejot pienu, ieguva maisījumu $\frac{2}{3}k + \frac{1}{3}p$. Izdzerot puskrūzi dzēriena, gan kafijas, gan piena daudzums samazinās 2 reizes, tātad paliek $\frac{1}{3}k + \frac{1}{6}p$. Pielejot puskrūzi piena, iegūst maisījumu $\frac{1}{3}k + \frac{1}{6}p + \frac{1}{2}p = \frac{1}{3}k + \frac{2}{3}p$. Tātad tīras kafijas un piena attiecība tagad ir 1:2.

17.	Pieņemsim, ka melo Aldis, tad no zēnu izteikumiem seko, ka Aldis finišēja 1. vai 4., Pēcis 1., 2. vai 3., Didzis 1., Mārcis 4. – nevar būt, tātad Aldis nemelo. Pieņemsim, ka melo Pēcis, tad Aldis finišēja 2. vai 3., Pēcis 4., Didzis 1., Mārcis 4. – nevar būt, tātad Pēcis nemelo. Pieņemsim, ka melo Didzis, tad no zēnu izteikumiem seko, ka Aldis finišēja 2. vai 3., Pēcis 1., 2. vai 3., Didzis 2., 3. vai 4., Mārcis 4. –var būt, uzvarēja Pēcis. Pieņemsim, ka melo Mārcis, tad no zēnu izteikumiem seko, ka Aldis finišēja 2. vai 3., Pēcis 1., 2. vai 3., Didzis 1., Mārcis 1., 2. vai 3. – nevar būt, tātad Didzis nemelo. Tātad vienīgā iespēja ir, ka melo Didzis un sacensībās uzvarēja Pēcis.
18.	Ja *x* un *y* meklējamie skaitļi, tad $\begin{cases} \frac{x+y}{2}=25 \\ \sqrt{xy}=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=50 \\ xy=576 \end{cases}$ un skaitļi *x*, *y* ir skaitļi 18 un 32.
19.	Pieņemsim, ka ir *x* baltas zeķes, tad ir $10-x$ melnas zeķes. Pāris veidos tad, ja abas zeķes būs baltas vai abas melnas. No 10 zeķēm divas var izvēlēties $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ veidos. Divas baltas zeķes var izvēlēties $\frac{x(x-1)}{2}$ veidos, divas melnas $\frac{(10-x)(9-x)}{2}$, tātad pāris var veidoties $\frac{x(x-1)}{2}+\frac{(10-x)(9-x)}{2}=\frac{x^2-x+90-19x+x^2}{2}=x^2-10x+45$ gadījumos. Tāpēc varbūtība izvilkt pāri ir $\frac{x^2-10x+45}{45}=\frac{7}{15} \Rightarrow x^2-10x+45=21 \Rightarrow x^2-10x+24=0 \Rightarrow x=4$ vai $x=6$, tātad ir 4 baltas un 6 melnas zeķes vai 6 baltas un 4 melnas zeķes.
20.	Apzīmēsim izgriežamo kvadrātiņu malas garumu ar *x* cm. Iegūtās kastītes sānu virsmas laukumu veido iekrāsotie taisnstūri, to kopējais laukums ir $S(x)=2(x(30-2x)+x(50-2x))=-8x^2+160x=8x(x-20)$.  $S(x)$ ir kvadrātfunkcija, tās grafiks ir parabola ar uz leju vērstiem zariem, tāpēc šīs funkcija lielākā vērtība ir parabolas virsotnē. Funkcijas $S(x)$ saknes ir 0 un 20, tātad parabolas virsotnes koordināte x_0 ir sakņu vidējais aritmētiskais, t.i., $x_0=10$. Lai iegūtu kastīti ar lielāko iespējamo laukumu, kartona loksnes stūros jāizgriež kvadrāti ar malas garumu 10 cm.