Liepājas Universitātes profesora Edvīna Ģinguļa vārdā nosauktās matemātikas olimpiādes

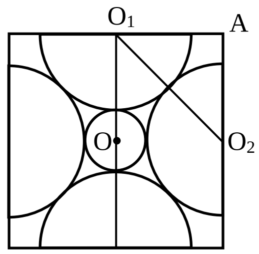
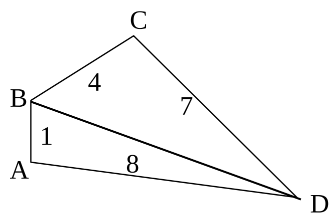
2016. gada 22. janvāris

10. – 12. klašu

1. daļas ATBILDES

Pareiza atbilde: **+2** *punkti, nepareiza atbilde:* **-1** *punkts, nav atbildēts:* **0** *punkti*

Uzd. nr.	**Pareizā atbilde**	**Skaidrojums**
1.	**A**	$4^n+4^n+4^n+4^n=4\cdot 4^n=4^{n+1}=(2^2)^{n+1}=2^{2n+2}=2^{2016}\Rightarrow 2n+2=2016\Rightarrow$ $n=1007$.
2.	**E**	Tā kā 10 cm + 13 cm < 24 cm, t.i., neizpildās trijstūra nevienādība, tāpēc trijstūris ar šādiem malu garumiem neeksistē.
3.	**D**	Parabolas zari vērti uz leju, tātad $a<0$. Parabolas krustpunktam ar y asi y koordināte ir pozitīva, tātad $c>0$. Virsotnes x koordināte $x_0=\frac{-b}{2a}>0$, tātad $b>0$.
4.	**D**	Ņūtona binoma $(a+b)^n$ koeficients pie monoma $a^m b^{n-m}$ ir C_n^m. Šajā gadījumā $C_6^2=\frac{6!}{2!\cdot(6-2)!}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15$.
5.	**D**	Tā kā interesē tikai atrisinājumi naturālos skaitļos, aplūkojam, kā skaitli 111 var izteikt kā divu naturālu skaitļu reizinājumu (neņemot vērā reizinātāju secību): $111=1\cdot 111=3\cdot 37$. Pārbaudot šos skaitļus otrajā vienādojumā, secinām, ka der tikai atrisinājums $x=37$, $y=3$.
6.	**A**	$3^{3^{3^3}}=3^{3^{27}}$, $\left(3^3\right)^{3^3}=\left(3^3\right)^{27}=3^{3\cdot 27}=3^{81}=3^{3^4}$, $\left(3^{3^3}\right)^3=\left(3^{27}\right)^3=3^{27\cdot 3}=3^{81}$, $3^{\left(3^3\right)^3}=3^{3^{3\cdot 3}}=3^{3^9}$. $3^{3^{27}}>3^{3^9}>3^{3^4}$.
7.	**C**	Trijstūris BXY ir vienādsānu, tātad $\angle BXY=\angle BYX=(180°-12°):2=84°$. $\angle BXY=\angle XAB+\angle XBA$ kā trijstūra AXB ārējais leņķis. Trijstūris AXB ir vienādsānu, tātad $\angle XAB=\angle XBA=84°:2=42°$. Arī trijstūris ABC ir vienādsānu, tāpēc $\angle ABC=\angle ACB=(180°-42°):2=69°$. Tātad $\angle CBY=69°-42°-12°=15°$.
8.	**D**	Regulāram desmitstūrim piecas simetrijas asis ir taisnes, kas iet caur pretējām virsotnēm, un piecas simetrijas asis ir taisnes, kas iet caur pretējo malu viduspunktiem. (Visas šīs taisnes iet caur regulārajam 10-stūrim apvilktās riņķa līnijas centru.)
9.	**D**	8^n pēdējie cipari periodiski atkārtojas {8; 4; 2; 6} (perioda garums 4). Tātad jānoskaidro, kādu atlikumu, dalot ar 4, dot pakāpe 8^8. Tā kā 8 dalās ar 4, tad arī 8^8 dalās ar 4 bez atlikuma. Tātad 8^{8^8} pēdējais cipars ir tāds pats kā 8^4 pēdējais cipars, t.i., 6.
10.	**B**	Kvadrātam apvilktās riņķa līnijas rādiuss R ir puse no kvadrāta diagonāles, bet kvadrātā ievilktās riņķa līnijas rādiuss r ir puse no malas. Ja kvadrāta malas garums ir a, tad diagonāles garums ir $a\sqrt{2}$ un $\frac{R}{r}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}$.
11.	**D**	$\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$.
12.	**E**	Ievērosim, ka $1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$, tāpēc doto izteiksmi var pārrakstīt kā $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2016}{2015}\cdot\frac{2017}{2016}=\frac{2017}{2}=1008{,}5$.

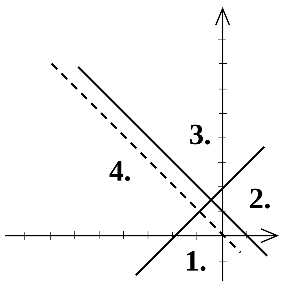
13.	**C**	Tā kā starp jebkurām divām fizikas grāmatām stāv vismaz divas matemātikas grāmatas, tātad starp jebkurām trīs pēc kārtas ņemtām grāmatām vismaz divas ir matemātikas grāmatas, tad matemātikas grāmatu ir vismaz $2\cdot\left[\dfrac{50}{3}\right]=32$, tātad apgalvojums A noteikti ir patiess. Tā kā starp katrām trīs pēc kārtas ņemtām grāmatām vismaz divas ir matemātikas grāmatas, tad starp katrām 9 pēc kārtas ņemtām grāmatām vismaz 6 ir matemātikas grāmatas, tātad apgalvojums E arī vienmēr ir patiess. Fizikas grāmatas var atkārtoties ne biežāk kā katra trešā, tāpēc fizikas grāmatu skaits nevar būt lielāks nekā $\left[\dfrac{50}{3}\right]+1=17$, tātad B apgalvojums arī vienmēr ir patiess. Tā kā 50 grāmatas var sadalīt tikai 16 pilnos pēc kārtas sekojošos “trijniekos” (katrā trijniekā var būt ne vairāk kā viena fizikas grāmata), tad atbilstoši uzdevuma prasībām izvietojot 17. fizikas grāmatu, tā noteikti jānovieto rindas sākumā vai beigās, tāpēc apgalvojums D noteikti ir patiess. Savukārt var gadīties, ka nevienā vietā blakus nestāv vairāk kā divas matemātikas grāmatas, piem., fizikas grāmatas ir 3., 6., 9., 12., ..., 45., 48. vietās, un pārējās vietās – matemātikas grāmatas – tieši divas kopā. Tātad apgalvojums C var būt gan patiess, gan aplams. ([*x*] ir veselā daļa no skaitļa *x*.)
14.	**A**	Tā kā O_1 un O_2 ir kvadrāta malu viduspunkti, tad trijstūris O_1AO_2 ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris. O_1O_2 ir nogrieznis, kas savieno divu pieskarošos riņķa līniju centrus, tātad iet caur šo riņķa līniju pieskaršanās punktu un tā garums ir vienāds ar abu riņķa līniju rādiusu summu, t.i., $O_1O_2=1+1=2$. Tad  $AO_1=AO_2=\dfrac{O_1O_2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. $OO_1=AO_2=\sqrt{2}$, tātad iekšējās riņķa līnijas rādiuss ir $OO_1-1=\sqrt{2}-1$.
15.	**A**	45% no 640 +64% no 450=0,45·640+0,64·450=4,5·64+64·4,5=9·64. $\dfrac{9\cdot 64}{1440}\cdot 100\%=\dfrac{9\cdot 64}{9\cdot 16}\cdot 10\%=40\%$.
16.	**D**	Lielākais laukums četrstūrim būs tad, kāda no diagonālēm to var sadalīt divos taisnleņķa trijstūros (no visiem trijstūriem, kuriem divu malu garumi ir atbilstoši vienādi, lielākais laukums ir taisnleņķa trijstūrim).  Ievērojam, ka $4^2+7^2=16+49=65$ un $1^2+8^8=1+64=65$, tātad tiešām var gadīties, ka trijstūri ABD un CBD abi ir taisnleņķa. Tad četrstūra ABCD laukums ir $S_{ABD}+S_{CBD}=(1\cdot 8):2+(4\cdot 7):2=4+14=18$. (Citos gadījumos Četrstūra ABCD laukums būs mazāks. Otra diagonāle nevar sadalīt četrstūri divos taisnleņķa trijstūros, jo $1^2+4^2<7^2+8^2$.)

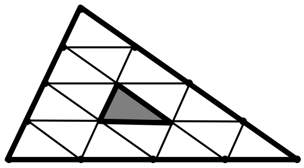
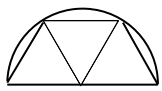
Liepājas Universitātes profesora Edvīna Ģinguļa vārdā nosauktās matemātikas olimpiādes

10. – 12. klašu

2. daļas ATBILDES

Max vērtējums uzdevumā: **3** *punkti*

Uzd. nr.	**Atbilde**	**Risinājums**
1.	**10**	Visērtāk doto uzdevumu atrisināt, izmantojot kongruences jēdzienu. $10!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\equiv_{11}1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot(-5)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\equiv_{11}$ $\equiv_{11}-4\cdot9\cdot16\cdot25\equiv_{11}-4\cdot(-2)\cdot5\cdot3\equiv_{11}10\cdot12\equiv_{11}10\cdot1=10$.
2.	**5**	Apzīmēsim taisnstūra paralēlskaldņa skaldņu garumus ar *a*, *b*, *c*. Tad $a^2+b^2=3^2$, $a^2+c^2=4^2$ un $b^2+c^2=5^2$ un taisnstūra paralēlskaldņa diagonāles garuma kvadrāts ir $d^2=a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}\left(\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)+\left(b^2+c^2\right)\right)=\frac{1}{2}\left(3^2+4^2+5^2\right)=$ $=\frac{1}{2}\left(5^2+5^2\right)=5^2$. Īstenībā sanāk, ka viens no šāda taisnstūra paralēlskaldņa izmēriem ir 0 un tas nemaz nav telpisks ķermenis, bet gan ir reducējies par plaknes figūru taisnstūri ar malu garumiem 3 un 4 un diagonāli 5.
3.	**4**	$x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=x+\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}}=x+\frac{x}{x^2+1}=4\frac{4}{17}$. Pārbaudot, redzam, ka der tikai atbilde *x*=4.
4.	$\frac{128}{9}$	Tā kā ABC un XYZ ir vienlieli vienādsānu taisnleņķa trijstūri, tad tie ir arī vienādi. Kvadrāta KLMB malas garums ir 4. Tā kā ABC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tad MLC arī ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris un MC=LM=BM=4. Tad AB=BC=XY=YZ=8 un $\mathrm{AC}=\mathrm{XZ}=8\sqrt{2}$. Tā kā $\angle$Z=45° un $\angle$RQZ=90°, tad QRZ ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris. $\angle$YRS=180°-90°-45°=45°, tad arī SRY ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris. Apzīmēsim kvadrāta PQRS malas garumu ar *a*. Tad $\mathrm{RZ}=a\sqrt{2}$ un $\mathrm{YR}=\frac{a}{\sqrt{2}}$. $\mathrm{YZ}=8=\mathrm{YR}+\mathrm{RZ}=\frac{a}{\sqrt{2}}+a\sqrt{2}=\frac{3a}{\sqrt{2}}$, no kurienes $a=\frac{8\sqrt{2}}{3}$. Tātad kvadrāta PQRS laukums ir $a^2=\frac{64\cdot2}{9}=\frac{128}{9}$.
5.	$\frac{7}{4}$	$\left(\sin(5!)^\circ\right)^{\log_3 9}+\mathrm{tg}\left(C_7^3+C_5^3\right)^\circ=\left(\sin120^\circ\right)^2+\mathrm{tg}\left(\frac{7!}{3!\cdot4!}+\frac{5!}{3!\cdot2!}\right)^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\mathrm{tg}(35+10)^\circ=$ $=\frac{3}{4}+\mathrm{tg}45^\circ=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$
6.	**4.**	Zīmējumā ar nepārtrauktām līnijām attēlotas dotās taisnes un parādīts, kā jāsanumurē iegūtās plaknes daļas. Punkts (-2016; 2016) atrodas uz taisnes $y=-x$ (zīmējumā attēlota ar pārtrauktu līniju). Redzam, ka pie $x\in(-\infty;-1)$ šī taisne atrodas 4. plaknes daļā. 

7.	**28**	Dotais *n*-stūris tika sadalīts 3+4+5=12 daļās. Tā kā diagonāles nekrustojas, tad novelkot vienu diagonāli, daļu skaits palielinājās par 1. Tas nozīmē, ka pavisam ir novilktas 11 diagonāles. Visām daļām kopā ir $3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5=50$ malas. Sākotnējā *n*-stūra mala ir mala tieši vienai iegūtajai daļai, savukārt katra novilktā diagonāle ir mala tieši divām iegūtajām daļām, tāpēc $n+11\cdot 2=50$ jeb *n*=28.
8.	**72**	Tā kā $N\,\vdots\,d$ un $d=18m=2\cdot 9\cdot m$, tad $N\,\vdots\,2$ un $m=2$ (jo 2 ir mazākais pirmskaitlis). Tātad $d=18\cdot 2=36$ un $N=m\cdot d=2\cdot 36=72$.
9.	**Piramīda, pamats 15-stūris**	Ja pamatā ir *n*-stūris, tad piramīdai ir *n*+1 skaldne un 2*n* šķautnes, bet prizmai ir *n*+2 skaldnes un 3*n* šķautnes. Ja dotais daudzskaldnis būtu prizma, tad $n+2=16$ jeb *n*=14, bet $3\cdot 14\neq 30$. Ja dotais daudzskaldnis būtu prizma, tad $n+1=16$ jeb *n*=15 un $2\cdot 15=30$, tātad tā ir piramīda, kurai pamatā ir 15-stūris.
10.	**Trīs**	Izsakot no taisnes vienādojuma *y*, iegūstam $y=10-\frac{3}{5}x$. I kvadrantā visiem punktiem gan *x*, gan *y* koordinātes ir pozitīvi skaitļi. Tātad jānoskaidro, cik ir tādu veselu pozitīvu *x* vērtību, kurām arī *y* ir veseli pozitīvi skaitļi. Lai *y* būtu vesels skaitlis, *x* jādalās ar 5. Lai *y* būtu pozitīvs, jābūt $\frac{3}{5}x<10$ jeb $0<x<16\frac{2}{3}$. Visus šos nosacījumus apmierina tikai trīs skaitļu pāri (*x*; *y*) (dotās taisnes punkti): (5; 7), (10; 4) un (15; 1).
11.	**-1 un** $\frac{5}{6}$	No Vjeta teorēmas vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ seko, ka $\frac{c}{a}=6$ un $\frac{b}{a}=-5$. Ja vienādojuma $cx^2+ax+b=0$ saknes ir x_1 un x_2, tad $x_1\cdot x_2=\frac{b}{c}=\frac{b}{a}:\frac{c}{a}=-\frac{5}{6}$ un $x_1+x_2=-\frac{a}{c}=-1:\frac{c}{a}=-\frac{1}{6}$. Dotos nosacījumus apmierina skaitļi $\frac{5}{6}$ un -1.
12.	**4**	ABCD ir paralelograms, jo $AD\parallel BC$ un $AB\parallel DC$. $\Delta BPL\sim\Delta APQ\sim\Delta QKD$ – regulāri trijstūri. QP=PL+LQ=LK=LQ+QK, tātad PL=QK=BL=QD, tāpēc AB+BL=AP=CK=CD+CK, tāpēc 16=AB+(BL+LC)+(CD+DQ)+AQ=4·LC un LC=4.
13.	$\frac{1}{16}$	Savienojot visus dalījuma punktus ar taisnēm, kas paralēlas trijstūra malām, dotais trijstūris tiek sadalīts 16 vienādos trijstūrīšos. 
14.	$27\sqrt{3}$	Dotā trapece ir vienādsānu trapece, kuras sānu malas un īsākais pamats ir 6 vienības gari, bet garākā pamata garums ir 12. Novelkot rādiusus, trapece tiek sadalīta trīs vienādos vienādmalu trijstūros ar malas garumu 6. Tātad trapeces laukums ir $3\cdot 6^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=27\sqrt{3}$. 
15.	**16**	$\sqrt{12-\sqrt{7+\sqrt{10-\sqrt{x+5\sqrt{x}}}}}=3 \Rightarrow \sqrt{7+\sqrt{10-\sqrt{x+5\sqrt{x}}}}=3 \Rightarrow$ $\sqrt{10-\sqrt{x+5\sqrt{x}}}=2 \Rightarrow \sqrt{x+5\sqrt{x}}=6 \Rightarrow 5\sqrt{x}=36-x \Rightarrow 25x=36^2-72x+x^2 \Rightarrow$ $x^2-97x+1296=0 \Rightarrow x_1=16; x_2=81$. Taču katrai zemsaknes izteiksmei jābūt pozitīvai, tāpēc vērtība *x*=81 neder, jo $10-\sqrt{81+5\sqrt{81}}<0$.

<table>
<tr>
<td>16.</td>
<td>17</td>
<td>Apzīmēsim dalībnieku iegūtos punktus attiecīgi ar p, n, g, f. Tad $\frac{p+n+g+f}{4}=16$ jeb $p+n+g+f=64$; līdzīgi $p+n=16\cdot 2=32$, $p+f=13\cdot 2=26$ un $n+f=18\cdot 2=36$. Saskaitot pēdējās trīs vienādības, iegūstam $2(p+f+n)=94 \Rightarrow$ $p+f+n=47 \Rightarrow g=(p+n+g+f)-(p+f+n)=64-47=17$.</td>
</tr>
<tr>
<td>17.</td>
<td>$\frac{3}{5}$</td>
<td>Pieņemsim, ka sākotnējā briljanta masa ir 1, dalīšanas rezultātā iegūto gabalu masas ir x un 1-x.
Tagadējo gabalu kopējā vērtība, salīdzinot ar sākotnējā briljanta vērtību ir
$x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1=1-0{,}48 \Rightarrow x^2-x+0{,}24=0 \Rightarrow$ x=0,6 vai 0,4.</td>
</tr>
<tr>
<td>18.</td>
<td>$2017\frac{2016}{2017}$</td>
<td>Tā kā $0 \le \{x\} < 1$ un $[x]\cdot\{x\}=2016$, tad $[x]>2016$tad jāmeklē tāds skaitlis x, kuram daļveida daļa ir iespējami liela (tuvāk 1), bet veselā daļa iespējami maza. Mazākais veselais skaitlis, kāda var būt [x] vērtība ir 2017, tātad $x=2017\frac{2016}{2017}$:
$[x]=2017, \{x\}=\frac{2016}{2017}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>19.</td>
<td>$\frac{56}{405}$</td>
<td>Tabulā apkoposim, kādas iespējas izvilkt divas bumbiņas 1. reizē un varbūtība izvilkt abas jaunas bumbiņas 2. reizē.
<table>
<tr><td rowspan="2">1. reize</td><td>j, j</td><td>v, v</td><td>j, v</td></tr>
<tr><td>$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$</td><td>$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$</td><td>$2\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{9}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.reize</td><td>j, j</td><td>j, j</td><td>j, j</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$</td><td>$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$</td><td>$\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$</td></tr>
</table>
Tātad kopējā varbūtība, 2. reizē izvilkt abas jaunas bumbiņas ir
$\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{15}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}+\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{15}=\frac{56}{405}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>20.</td>
<td>100</td>
<td>Dotā izteiksme pieņems savu mazāko vērtību tad, kad visi skaitītāji būs vienādi ar saucējiem, t.i., katras daļas vērtība būs 1 un summas vērtība būs 100.
Pierādīsim, ka kaut vai samainot vietām divu daļu skaitītājus (pārējās daļas nemainot) izteiksmes vērtība palielināsies.
Jāpierāda: $\frac{m}{m}+\frac{n}{n}<\frac{n}{m}+\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{2nm}{nm}<\frac{n^2+m^2}{nm} \Rightarrow 2nm<n^2+m^2$ (jo nm>0) jeb $(n-m)^2>0$. Iegūtā nevienādība ir patiesa, jo dotajā izteiksmē visu daļu saucēji ir dažādi, t.i., $n \ne m$. Tātad arī visas iepriekšējās nevienādības ir patiesas, k.b.j.</td>
</tr>
</table>