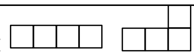
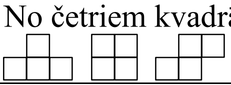
Liepājas Universitātes profesora Edvīna Ģinguļa vārdā nosauktās matemātikas olimpiādes

2016. gada 22. janvāris

8. – 9. klašu

1. daļas ATBILDES

Pareiza atbilde: **+2** *punkti, nepareiza atbilde:* **-1** *punkts, nav atbildēts:* **0** *punkti*

Uzd. nr.	**Pareizā atbilde**	**Skaidrojums**
1.	**E**	$2^4 : 4^3 : 8^2 = \dfrac{2^4}{\left(2^2\right)^3 \cdot \left(2^3\right)^2} = \dfrac{2^4}{2^6 \cdot 2^6} = \dfrac{1}{2^8} = \dfrac{1}{256}$
2.	**B**	A un C atbilžu variantos neizpildās trijstūra nevienādība $a+b>c$: 1 cm+2 cm<9 cm; 2 cm+4 cm=6 cm. Atbilžu variantā D perimetrs ir 15 cm>12 cm (stieples garumu).
3.	**D**	$C = 2\pi R$, tātad $\dfrac{C}{R} = 2\pi$. No dotajiem skaitļiem skaitļa 2π vērtībai vistuvāk ir skaitlis 6,28.
4.	**B**	Nogriežņi KL, LM, MN, KN ir attiecīgi trijstūru ABO, BOC, COD, DAO viduslīnijas, tātad KLMN ir taisnstūris, kura malas ir divreiz īsākas nekā taisnstūra ABCD malas. Tāpēc KLMN laukums ir 2^2=4 reizes mazāks nekā ABCD laukums un S(KLMN)=20:4=5 cm^2.
5.	**A**	$79 \cdot 81 = (80-1)(80+1) = 80^2 - 1^2 = 6400 - 1 = 6399$
6.	**B**	Koeficients *a* nosaka taisnes slīpumu, šajā gadījumā a>0; koeficients *b* ir taisnes krustpunkta ar O*y* asi koordināte, tātad b<0.
7.	**C**	$2016 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 32 \cdot (a+b)$, tātad $a + b = 2016 : 32 = 63$
8.	**E**	Lai skaitlis dalītos ar 36, tam jādalās ar 9 un ar 4. Ar 9 dalās skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 9, tātad 2+9+0+8+2+*+6=27+* jādalās ar 9 un * var būt 0 vai 9. Ar 4 dalās skaitļi, kuru pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4, t.i., *6 jādalās ar 4. Tā kā 06=6 ar 4 nedalās, bet 96 ar 4 dalās, * var būt tikai 9.
9.	**D**	Apzīmēsim trijstūra malu garumus ar 2*x*, 3*x* un 4*x*. Tad perimetrs ir 2*x*+3*x*+4*x*=9*x*=45 cm un *x*=5 cm. Garākās un īsākās malas starpība ir 4*x*-2*x*=2*x*=2·5 cm=10 cm.
10.	**A**	Vienādojumus sauc par ekvivalentiem, ja tiem ir vieni un tie paši atrisinājumi. Dotā vienādojuma $\dfrac{x}{2} = 2$ atrisinājums ir $x = 4$. No atbilžu variantos piedāvātajiem vienādojumiem, tikai $5x = 20$ atrisinājums ir $x = 4$. (Vienādojuma $\dfrac{2}{x} = 2$ atrisinājums ir $x = 1$; vienādojuma $x + 4 = 0$ atrisinājums ir $x = -4$; vienādojuma $x - 4 = 4$ atrisinājums ir $x = 8$.)
11.	**D**	I apgalvojums ir aplams – ne visi taisnstūri ir kvadrāti (patiess būtu apgrieztais apgalvojums: visi kvadrāti ir taisnstūri). II un III apgalvojumi ir patiesi: taisnstūris ir paralelograms, kura visi leņķi ir 90°, tātad visi taisnstūri ir paralelogrami; rombs ir paralelograms, kura visas malas ir vienāda garuma, bet kvadrāts ir paralelograms, kura visas malas ir vienāda garuma un visi leņķi ir taisni, tāpēc visi kvadrāti ir rombi.
12.	**D**	Katra taisne var krustoties ar augstākais 5 citām novilktajām taisnē, tāpēc uz katras taisnes var atrasties lielākais 5 krustpunkti, kas taisni sadala 2 staros un 4 nogriežņos. Tātad kopumā var veidoties lielākais 6·4=24 nogriežņi.
13.	**C**	Pēc pirmās cenas samazināšanas preces cena bija 150€-0,2·150€=120€. Pēc otrās cenas samazināšanas preces cena bija 120€-0,1·120€=108€, un pēc cenas palielināšanas par 10% tā kļuva 108€+0,1·108€=118,80€.
14.	**A**	No četriem kvadrātiņiem var izveidot 5 dažādas *tetramino* figūriņas:  

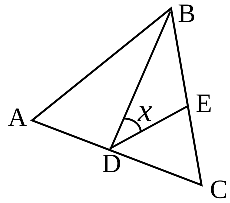
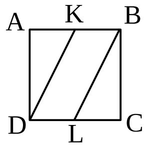
15.	**E**	Pārvietojoties pa nogriezni no punkta A uz punktu B, pa x asi notiek pārvietošanās par 7-1=6 vienībām, bet pa y asi – par 4-1=3 vienībām. Tātad pārvietojoties 2 vienības pa x asi, notiek pārvietošanās par 1 veselu vienību y ass virzienā. Tātad uz nogriežņa bez galapunktiem vēl atrodas divi punkti ar veselām koordinātēm (3;2); (5;3). Citi punkti ar veselām koordinātēm uz šī nogriežņa atrasties nevar, jo visiem nogriežņa punktiem y koordinātes ir dažādas un pieņem vērtības starp 1 un 4.
16.	**C**	Apzīmēsim attālumu starp ciemiem ar s km. Tad mazdēla ātrums ir $\frac{s}{2{,}5}$ km/h. Vectēvs šo ceļu veica $3\text{h}45\,\text{min}. = 3\frac{3}{4}\text{h} = 3{,}75\text{h}$ ar ātrumu $\frac{s}{3{,}75}$ km/h. Mazdēla ātrums ir $\frac{s}{2{,}5} : \frac{s}{3{,}75} = \frac{3{,}75s}{2{,}5s} = 1{,}5$ reizes jeb par 50% lielāks nekā vectēva ātrums.

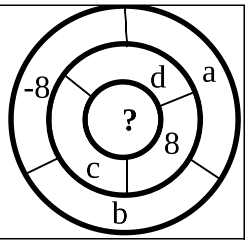
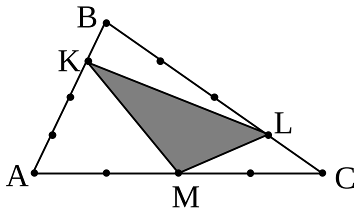
Liepājas Universitātes profesora Edvīna Ģinguļa vārdā nosauktās matemātikas olimpiādes

8. – 9. klašu

2. daļas ATBILDES

Max vērtējums uzdevumā: **3** *punkti*

Uzd. nr.	Atbilde	Risinājums
1.	**4**	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{11}{12}+\frac{17}{18}+\frac{35}{36}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{12}\right)+\left(1-\frac{1}{18}\right)+\left(1-\frac{1}{36}\right)=$ $=5-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\right)=5-1=4$
2.	**30°**	Tā kā AB=BC, tad BD ir gan mediāna, gan augstums, tātad ΔBDE ir taisnleņķa trijstūris, tāpēc DE=BE=EC (tainsnleņķa trijstūra mediāna ir puse no hipotenūzas). BE=AD, savukārt BE=EC un AD=DC, tad DE=EC=DC un trijstūris DEC ir vienādmalu, tāpēc ∠EDC=60°. Tātad *x*=90°-60°=30°. 
3.	**34**	Tā kā KLMN ir kvadrāts tad trijstūri ANK, BKL, CLM un DMN ir vienādi taisnleņķa trijstūri ar katetēm 3 un 5. Tad kvadrāta ABCD malas garums ir 3+5=8; $\text{S(ANK)}=\frac{3\cdot 5}{2}=7{,}5$ un $\text{S(KLMN)}=\text{S(ABCD)}-4\cdot\text{S(ANK)}=8^2-4\cdot 7{,}5=64-30=34$.
4.	**256**	$\frac{7n+217}{2016}=\frac{7(n+31)}{2016}=\frac{n+31}{288}$, tātad dotā daļa ir saīsināma visām *n* vērtībām. Tāpēc jāatrod lielākā *n* vērtība, ar kuru daļas vērtība ir mazāka nekā 1: $\frac{n+31}{288}<1\Rightarrow$ $n+31<288\Rightarrow\ n<257$, tātad lielākā veselā *n* vērtība, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 256.
5.	**6**	Apzīmēsim konfekšu skaitu pirmajā kastē ar *x*. Tad otrajā kastē ir 4*x* konfektes, bet trešajā kastē ir $4x-0{,}25\cdot 4x=3x$ konfektes. $x+4x+3x=8x=16$, tātad *x*=2 un trešajā kastē ir 3·2=6 konfektes.
6.	**32 cm²**	Četrstūris KBLD ir paralelograms (pretējās malas KB un DL ir paralēlas un vienāda garuma), tāpēc tā laukums ir vienāds ar malas garuma un augstuma pret šo malu reizinājumu, t.i., S(KBLD)=KB·BC=(8:2)·8=32 cm². 
7.	**35**	$1:(2:3:4:5):(6:7)=1:\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}:\frac{6}{7}=\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 6}=35$
8.	**55**	Tā kā desmit skaitļu vidējais aritmētiskais ir 10, tad visu desmit skaitļu summa ir 10·10=100. Tā kā visi skaitļi ir dažādi naturāli skaitļi, tad deviņu mazāko skaitļu mazākā iespējamā summa ir 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45, tāpēc lielākais no šiem skaitļiem nevar būt lielāks par 100-45=55.
9.	**33**	LKD var meklēt gan sadalot abus skaitļus pirmreizinātājos, gan izmantojot Eiklīda algoritmu: $111111=3333\cdot 33+1122$ $3333=1122\cdot 2+1089$ $1122=1089\cdot 1+33$ $1089=33\cdot 33+0$ tātad LKD(111111, 3333)=33 – pēdējais nenulles atlikums.

10.	**16**	Apzīmēsim lauciņos ierakstītos skaitļus kā redzams zīmējumā. Tad -8=a+b+c+d un 8=a+b+c+d+**?**. Tātad **?**=8-(-8)=16. 
11.	**1 h 20 min.**	Jānis 1 stundā iztīra $\frac{1}{3}$ no stāvlaukuma, Pēteris $\frac{1}{4}$, bet Juris $\frac{1}{6}$ no šī stāvlaukuma. Tātad, strādājot kopā, vienā stundā viņi var iztīrīt $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ no stāvlaukuma. Tātad visa stāvlaukuma iztīrīšanai viņiem nepieciešams $1:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}$ stundas jeb 1 stunda un 20 minūtes.
12.	**1**	$3*4=\frac{2\cdot 3+4}{3}=\frac{10}{3}$, $5*6=\frac{2\cdot 5+6}{3}=\frac{16}{3}$ un $\frac{10}{3}\otimes\frac{16}{3}=\frac{\frac{16}{3}-\frac{10}{3}}{2}=1$.
13.	**21**	Tā kā reizinājuma pēdējais cipars ir 4, tad neviens no sareizinātajiem skaitļiem nebeidzas ar 0 vai 5; tātad četru sareizināto skaitļu pēdējie cipari ir 1, 2, 3 un 4 vai 6, 7, 8 un 9. Ievērosim, ka 16·17·18·19<20·20·20·20=160000<255024. Tātad sareizinātie skaitļi ir lielāki nekā 20. Pārbaudot nākamos skaitļus, iegūstam pareizu vienādību 21·22·23·24=255024.
14.	$\mathbf{\frac{5}{16}}$	 S(KLM)=S(ABCD)-S(AKM)-S(BKL)-S(CML) un $\frac{S(KLM)}{S(ABC)}=1-\frac{S(AKM)}{S(ABC)}-\frac{S(BKL)}{S(ABC)}-\frac{S(CML)}{S(ABC)}$. $\frac{S(AKM)}{S(ABC)}=\frac{0{,}5\cdot AK\cdot AM\cdot\sin A}{0{,}5\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A}=\frac{\frac{3}{4}AB\cdot\frac{2}{4}AC}{AB\cdot AC}=\frac{6}{16}$ $\frac{S(BKL)}{S(ABC)}=\frac{0{,}5\cdot BK\cdot BL\cdot\sin B}{0{,}5\cdot AB\cdot BC\cdot\sin B}=\frac{\frac{1}{4}AB\cdot\frac{3}{4}BC}{AB\cdot BC}=\frac{3}{16}$ $\frac{S(CML)}{S(ABC)}=\frac{0{,}5\cdot CL\cdot CM\cdot\sin C}{0{,}5\cdot CB\cdot AC\cdot\sin C}=\frac{\frac{1}{4}CB\cdot\frac{2}{4}AC}{CB\cdot AC}=\frac{2}{16}$ Tātad $\frac{S(KLM)}{S(ABC)}=1-\frac{6}{16}-\frac{3}{16}-\frac{2}{16}=\frac{5}{16}$.
15.	**1980**	Tā kā summas D+A pēdējais cipars ir A, tad D=0. Tā kā saskaitot divus četrciparu skaitļus, summā iegūts piecciparu skaitlis, tad summas pirmais cipars ir 1 (jo ABCD+CDEA<9999+9999=19998), tātad C=1. Tā kā simtu šķirā B+0=B, tad nerodas pārnesums uz tūkstošu šķiru un A+1=10, tātad A=9. Pārnesumi nerodas arī uz desmitu šķiru (jo A+0=A) un uz simtu šķiru (jo simtu šķirā B+0=B), tātad desmitu šķirā 1+E=9 un E=8. B var pieņemt jebkuru no vērtībām 2, 3, 4, 5, 6 vai 7.
16.	**224**	Naturālais skaitlis būs mazāks, ja tajā būs mazāk ciparu, savukārt pie dotas ciparu summas mazāks ciparu skaits būs tad, ja katrs cipars būs iespējami lielāks. Ievērojam, ka 2016=9·224, tātad mazākais naturālais skaitlis, kura ciparu summa ir 2016, uzrakstāms ar 224 devītniekiem.
17.	**99**	Ja pagrabā dzīvotu vismaz divas brūnas peles, tad, izvēloties šīs divas brūnās peles, starp tām nebūtu nevienas pelēkas. Tāpēc brūno peļu ir ne vairāk kā viena. Tā kā zināms, ka ir vismaz viena brūna pele, tad pagrabā ir tieši viena brūna pele un 100-1=99 pelēkas peles.

18.	**Divi**	2016=63·32=126·16. Vecmāmiņas vecumam būtu jābūt virs 40 gadiem. Maz ticams, ka vecmāmiņai ir 126 gadi, tātad vecmāmiņai ir 63 gadi, un visu brāļu vecumu reizinājums ir 32. Sadalot reizinātājos, lai lieļākais no tiem būtu divas reizes lielāks par mazāko, iegūstam 32=8·4=4·4·2=4·2·2·2=2·2·2·2·2·1. No uzdevuma formulējuma "[viens] vecākais brālis ir 2 reizes vecāks par [vienu] jaunāko brāli" seko, ka ir viens visvecākais brālis un viens visjaunākais brālis. Tātad ir divi brāļi, 8 gadus un 4 gadus veci.
19.	**50**	Ja kāds būtu uz visiem jautājumiem atbildējis nepareizi (t.i., ne vienam jautājumam pareizā atbilde nav attiecīgais burts), tad viņš iegūtu 0 punktus. Tātad katrs vismaz vienu reizi atbildēja pareizi. Turklāt, tā kā visi ieguva atšķirīgu rezultātu, tad viņi pareizi atbildējuši uz dažādu skaitu jautājumu. Turklāt katrā jautājumā pareiza ir tieši viena atbilde, tātad uz katru jautājumu tieši viens jautrītis atbildēja pareizi, bet pārējie četri – nepareizi, turklāt visu pareizo atbilžu kopējais skaits ir 20. Četri jautrīši, kas ieguva mazāko punktu summu, pareizi atbildēja vismaz uz 1+2+3+4=10 jautājumiem. Tātad "uzvarētājs" pareizi atbildēja uz ne vairāk kā 20-10=10 jautājumiem un viņa rezultāts nevar būt vairāk nekā 20+10·4-(20-10)·1=50 punkti.
20.	**46**	4 istabas atbilstoši nosacījumiem, var izvēlēties sekojošos veidos: • gaiteņa labajā pusē izvēlas 3 istabas (to var izdarīt 1 veidā) un gaiteņa kreisajā pusē izvēlas 1 istabu (to var izdarīt 5 veidos), kopā 1·5=5 veidos; • gaiteņa kreisajā pusē izvēlas 3 istabas (to var izdarīt 1 veidā) un gaiteņa labajā pusē izvēlas 1 istabu (to var izdarīt 5 veidos), kopā 1·5=5 veidos; • gaiteņa abās pusēs izvēlas pa 2 istabā, vienā pusē divas istabas var izvēlēties 3+2+1=6 veidos, tātad abās pusēs kopā 6·6=36 veidos. Vairāk kā trīs istabas vienā gaiteņa pusē izvēlēties nevar, tātad kopējais variantu skaits ir 5+5+36=46.